Univerzitet u Zenici
Politehnički fakultet
Odsjek: Građevinarstvo
Zenica, 23.06.2014.

Inžinjerske matematike III, pismeni ispit

Važno: Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. U sva 4 zadatka objasnite značenja simbola iz formula koje upotrebite. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka. Obratiti pažnju na matematičku kulturu i matematičku pismenost.

1. Riješiti sistem diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + 2e^t \\ \dot{y} &= x + t \end{aligned}$$

2. Primjenom Laplasove transformacije rješiti diferencijalnu jednačinu

$$tx'' + 2(t-1)x' - 2x = 0; \quad x(0) = 0; \quad x'(0) = 0.$$

3. Na tri mašine se obrađuju isti mašinski elementi i to na prvoj 40%, a na drugoj i trećoj po 30% od svih elemenata. U procesu proizvodnje prva mašina daje 85%, druga 95% a treća 90% ispravnih elemena.

(a) Naći vjerovatnoću da je na slučaj uzeti element ispravan.

(b) Ako je slučajno uzeti element ispravan, kolika je vjerovatnoća da je obrađen na prvoj, drugoj ili trećoj mašini?

4. Prošlogodišnji uzorak testirane ribe iz Boračkog jezera pokazuje da je sredina koncentracije polihorovanog bifelina (PCB) po ribi iznosila 15ti dio miliona sa standardnom devijacijom 2gi dio miliona. Pretpostavimo da je sprovedeno novo testiranje i da slučajni uzorak od 25 riba ima sljedeću koncentraciju

$$15, 16, 17, 18, 17, 18, 12, 14, 11, 17, 13, 14, 14, 12, 12, 16, 13, 11, 14, 15, 16, 13, 10, 19, 20$$

(50%) (a) Naći sredinu uzorka, medijanu uzorka, mod uzorka, standardnu devijaciju, varijansu, raspon i interkvartilni raspon datih podataka. Predstaviti podatke grafički pomoću histograma i poligona frekvencija (naštimati histogram frekvencija tako da ima tačno 4 intervala).

(50%) (b) Pretpostavimo da je standardna devijacija ostala ista (2gi dio miliona). Testirati hipotezu da je sredina PCB koncentracije također ostala nepromjenjena (15ti dio miliona). Odrediti nivo značajnosti za koji će test odbaciti nultu hipotezu kao i nivo značajnosti za koji test neće odbaciti nultu hipotezu.

(#) Riješiti sistem linearnih jednačina

$$\dot{x} = y + 2e^t$$
$$\dot{y} = x + t$$

Rj: Prvo riješimo odgovarajući homogeni sistem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} -\dot{x} + y &= 0 \\ x - \dot{y} &= 0 \end{aligned}$$

Rješenja homogenog sistema su oblika $x = Ae^{\lambda t}$, $y = Be^{\lambda t}$

Matrica sistema

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

Za $\lambda = 1$

$$\begin{aligned} -A + B &= 0 \\ A - B &= 0 \end{aligned} \Rightarrow A = B \overset{B=1}{\Rightarrow} \begin{aligned} x_1 &= e^t \\ y_1 &= e^t \end{aligned}$$

Za $\lambda = -1$

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ A + B &= 0 \end{aligned} \Rightarrow A = -B \overset{B=1}{\Rightarrow} \begin{aligned} x_2 &= -e^{-t} \\ y_2 &= e^{-t} \end{aligned}$$

Rješenje homogenog sistema je
$$x = C_1 e^t - C_2 e^{-t}$$
$$y = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$$

Sada METODOM VARIJACIJE KONSTANTI pronađimo opšte rješenje nehomogenog sistema.

Nehomogeni sistem ima rješenje sljedećeg oblika

$$x(t) = c_1(t)\, e^{t} - c_2(t)\, e^{-t}$$

$$y(t) = c_1(t)\, e^{t} + c_2(t)\, e^{-t}$$

pri čemu ćemo izvode f-ja c_1' i c_2' odrediti iz sistema

$$c_1'(t)\, e^{t} - c_2'(t)\, e^{-t} = 2e^{t}$$

$$c_1'(t)\, e^{t} + c_2'(t)\, e^{-t} = t$$

(nehomogeni dio ovog sistema je nehomogeni dio sistema diferencijalnih jednačina). Sistem rješimo Kroneker-Kapelijevom metodom

$$\left[\begin{array}{cc|c} e^{t} & -e^{-t} & 2e^{t} \\ e^{t} & e^{-t} & t \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} e^{-t}(t+2e^{t}) \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} e^{t}(t-2e^{t}) \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \quad c_1'(t) = \frac{1}{2} e^{-t}(t+2e^{t}); \quad c_2'(t) = \frac{1}{2} e^{t}(t-2e^{t})$$

$$c_1(t) = \frac{1}{2}\int (te^{-t}+2)\, dt = \dots = t - \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{1}{2} te^{-t} + D_1$$

$$c_2(t) = \frac{1}{2}\int (te^{t}+2e^{2t})\, dt = \dots = \frac{1}{2} te^{t} - \frac{1}{2} e^{t} - \frac{1}{2} e^{2t} + D_2$$

Opšte rješenje datog sistema je

$$x(t) = \frac{1}{2} e^{t} - t + te^{t} + D_1 e^{t} - D_2 e^{-t}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} e^{t} + te^{t} - 1 + D_1 e^{t} - D_2 e^{-t}$$

(#) Riješiti sistem diferencijalnih jednačina

$$\dot{x} = y + 2e^t$$
$$\dot{y} = x + t$$

Rj: Dati sistem napišimo u drugačijem obliku

$$Dx - y = 2e^t$$
$$-x + Dy = t \quad /D$$

gdje je $Dx = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$, $Dy = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$

$$Dx - y = 2e^t$$
$$-Dx + D^2 y = 1$$
$$+$$

$$D^2 y - y = 2e^t + 1$$
$$(D^2 - 1) y = 2e^t + 1$$

linearna jednačina drugog reda po y
- opšte rješenje odredimo metodom neodređenih koeficijenata

$$y = y_h + y_p$$

karakteristična jednačina $\lambda^2 - 1 = 0$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$
$$y_h = C_1 e^{-t} + C_2 e^t$$

Primjetimo da se izraz e^t nalazi u homogenom rješenju pa imamo

$$y_p = Ate^t + Be^t + Ct + D$$
$$y_p' = Ae^t + Ate^t + Be^t - C$$
$$y_p'' = 2Ae^t + Ate^t + Be^t$$

$$\ddot{y} - y = 2Ae^t - Ct - D$$
$$\ddot{y} - y = 2e^t + 1$$

$2A = 2$ $\quad C = 0 \quad$ $-D = 1$

$A = 1$ $\quad\quad\quad\quad\quad$ $D = -1$

$$y = y_h + y_p = \underline{\underline{C_1 e^{-t}}} + \underline{C_2 e^{t}} + te^{t} + \underline{Be^{t}} - 1$$

$$= D_1 e^{t} + D_2 e^{-t} + te^{t} - 1$$

$$\dot{y} = x + t$$

$$x = \dot{y} - t \quad \Rightarrow \quad x = D_1 e^{t} - D_2 e^{-t} + te^{t} + e^{t} - t$$

Opšte rješenje datog sistema je

$$\begin{cases} x(t) = (D_1 + 1)e^{t} - D_2 e^{-t} + te^{t} - t \\ y(t) = D_1 e^{t} + D_2 e^{-t} + te^{t} - 1 \end{cases}$$

(#) Primjenom Laplasove transformacije riješiti diferencijalnu jednačinu

$$t x'' + 2(t-1)x' - 2x = 0; \quad x(0)=0, \quad x'(0)=0.$$

Rj.: Znamo da

$$\mathcal{L}\{x'(t)\}(s) = sX(s) - x(0) \quad i \quad \mathcal{L}\{x''(t)\}(s) = s^2X(s) - sx(0) - x'(0)$$

gdje je $\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = X(s)$.

$$t x'' + 2(t-1)x' - 2x = 0 \quad /\mathcal{L}$$

$$\mathcal{L}\{t x''\} + 2\mathcal{L}\{(t-1)x'\} - 2\mathcal{L}\{x\} = 0 \quad \ldots (*)$$

Pa odredimo prvo $\mathcal{L}\{t x''\}$ i $\mathcal{L}\{(t-1)x'\}(s)$.

Znamo $\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$, gdje $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$.

$$\mathcal{L}\{t x''\}(s) = (-1)^1 \frac{d}{ds}\left(s^2 X(s)\right) = (-1)\left(2sX(s) + s^2X'(s)\right) =$$
$$= -2sX(s) - s^2X'(s)$$

$$\mathcal{L}\{(t-1)x'\} = \mathcal{L}\{t x'\} - \mathcal{L}\{x'\} = \overbrace{(-1)\frac{d}{ds}\left(sX(s)\right)}^{(-1)(X(s)+sX'(s))} - sX(s)$$
$$= -X(s) - sX'(s) - sX(s)$$

$$(*) \Rightarrow \quad -2sX(s) - \underline{s^2X'(s)} - 2X(s) - \underline{2sX'(s)} - 2sX(s) - 2X(s) = 0$$

$$(-s^2-2s)\,X'(s)+(-4s-4)\,X(s)=0 \qquad /:(-1)(s^2+2s)$$

$$X'(s)+\frac{4s+4}{s^2+2s}X(s)=0$$

ovo je diferencijalna jednačina sa razdvojenim promjenjivim

$$\frac{X'(s)}{X(s)}=\frac{-4s-4}{s(s+2)}=(-2)\frac{1}{s+2}+(-2)\frac{1}{s} \qquad /\int$$

$$\ln X(s)=(-2)\ln(s+2)-2\ln(s)+\ln C_1$$

$$X(s)=\frac{C_1}{s^2(s+2)^2}$$

Prema teoremu konvolucije $\mathcal{L}\{f*g\}(s)=F(s)\,G(s)$.

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\,G(s)\}=(f*g)(t)$$

U našem slučaju $F(s)=\dfrac{1}{s^2}$, $G(s)=\dfrac{1}{(s+2)^2}$

$\vdots$ ZA VJEŽBU

$$x(t)=C(1-t-e^{-2t}-te^{-2t}),\quad C\neq 0$$

rješenje date diferencijalne jednačine

(#) Na tri mašine se obrađuju isti mašinski elementi i to na prvoj 40%, a na drugoj i trećoj po 30% od svih elemenata. U procesu proizvodnje prva mašina daje 85%, druga 95% a treća 90% ispravnih elemenata.

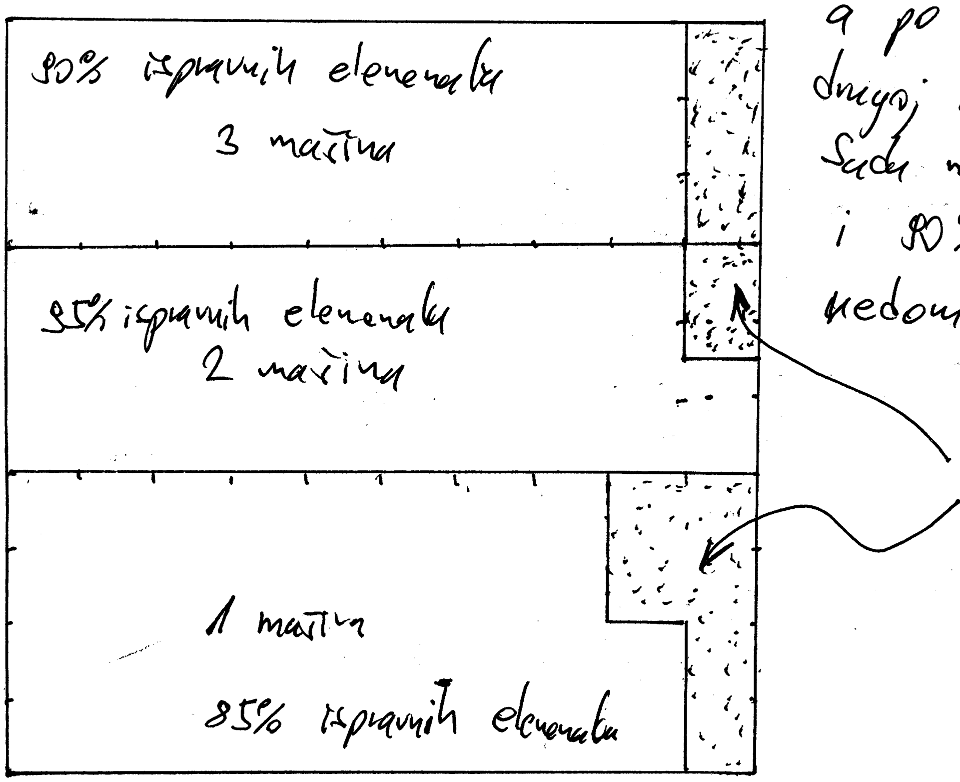
(a) Naći vjerovatnoću da je na slučaj uzeti element ispravan.

(b) Ako je slučajno uzeti element ispravan, kolika je vjerovatnoća da je obrađen na prvoj, drugoj ili trećoj mašini?

Rj: Dio pod (a) možemo uraditi na dva načina – primjenom geometrijske vjerovatnoće ili primjenom formule potpune vjerovatnoće.

(a) <u>I način</u>

Sve elemente koje proizvode tri mašine prikažimo pomoću kvadrata npr. dimenzija 10×10 cm. Tada 40% površine ovog kvadrata su elementi koji su proizvedeni na prvoj mašini, a po 30% kvadrata pripadaju drugoj i trećoj mašini. Sada nacrtajmo 85%, 95% i 90% ispravnih elemenata redom u tri dobijena kvadrata.



Neka je D događaj da je na slučaj uzeti element ispravan, tada

$$P(D)=\frac{m(\text{dio kvadrata koji nije istočkan})}{m(\text{čitav nacrtani kvadrat})}=\frac{89{,}5}{100}=0{,}895$$

II način:

A - događaj da je na slučaj uzeti mašinski element obrađen na prvoj mašini

B - događ. da je na sluč. uz. maš. elem. obrađ. na drugoj mašini.

C - ——— // ——— na trećoj mašini.

$P(A)=0{,}4 \quad P(B)=0{,}3, \quad P(C)=0{,}3$

D - događaj da je na slučaj izvučeni element ispravan

$P(D|A)=0{,}85, \quad P(D|B)=0{,}95, \quad P(D|C)=0{,}9$

Primjenom formule potpune vjerovatnoće dobijamo

$$P(D)=P(A)\cdot P(D|A)+P(B)\cdot P(D|B)+P(C)\,P(D|C)=\ldots=0{,}895$$

(b) Prema Bajesovim formulama je

$$P(A|D)=\frac{P(A)\cdot P(D|A)}{P(D)}=\frac{0{,}4\cdot 0{,}85}{0{,}895}\approx 0{,}3799$$

$$P(B|D)=\frac{P(B)\cdot P(D|B)}{P(D)}=\frac{0{,}3\cdot 0{,}95}{0{,}895}\approx 0{,}3184$$

tražene vjerovatnoće

$$P(C|D)=\frac{P(C)\cdot P(D|C)}{P(D)}=\frac{0{,}3\cdot 0{,}9}{0{,}895}\approx 0{,}3017$$

\# Prošlogodišnji uzorak testirane ribe iz Boračkog jezera pokazuje da je sredina koncentracije polihorovanog bifenila (PCB) po ribi iznosila 15ti dio miliona sa standardnom devijacijom 2gi dio miliona. Pretpostavimo da je provedeno novo testiranje i da slučajni uzorak od 25 riba ima sljedeću koncentraciju

15, 16, 17, 18, 17, 18, 12, 14, 11, 17, 13, 14, 14, 12, 12, 16, 13, 11, 14, 15, 16, 13, 10, 19, 20

(a) Naći sredinu uzorka, medijanu uzorka, mod uzorka, standardnu devijaciju, varijansu, raspon i interkvartilni raspon datih podataka. Predstaviti podatke grafički pomoću histograma i poligona frekvencija (naštimati histogram frekvencija tako da ima tačno 4 intervala)

(b) Pretpostavimo da je standardna devijacija ostala ista (2gi dio miliona). Testirati hipotezu da je sredina PCB koncentracije također ostala nepromjenjena (15ti dio miliona). Odrediti nivo značajnosti za koji će test odbaciti nultu hipotezu kao i nivo značajnosti za koji test neće obdaciti nultu hipotezu.

Rj: Prvo primjetimo da date podatke možemo prikazati pomoću sljedeće tabele frekvencija

x_i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
F_i	1	2	3	3	4	2	3	3	2	1	1

Suma frekvencija je 25 (veličina uzorka - 25 riba)

Sredina uzorka je

$$\bar{x} = \frac{10\cdot1+11\cdot2+12\cdot3+13\cdot3+14\cdot4+15\cdot2+16\cdot3+17\cdot3+18\cdot2+19+20}{25}$$

$$= \frac{367}{25} = 14,68$$

Broj podataka je neparan, pa je medijana uzorka 14.

Mod uzorka je po definiciji vrijednost koja ima najveću frekvenciju.

Mod uzorka je 14.

Standardnu devijaciju možemo odrediti na osnovu jedne od sljedeće dvije formule

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}}$$

$$\sum x_i^2 = 1\cdot10^2 + 2\cdot11^2 + 3\cdot12^2 + 3\cdot13^2 + 4\cdot14^2 + 2\cdot15^2 + 3\cdot16^2 + 3\cdot17^2 + 2\cdot18^2$$
$$+19^2 + 20^2 = 5559$$

$$n\bar{x}^2 = 25\cdot\frac{367^2}{25^2} = \frac{134689}{25} = 5387,56$$

Standardna devijacija je $s = \sqrt{\frac{171,44}{24}} \approx 2,6727$

Varijansa uzorka je $s^2 = \frac{171,44}{24} \approx 7,1433$

Raspon uzorka je $R = 20 - 10 = 10$

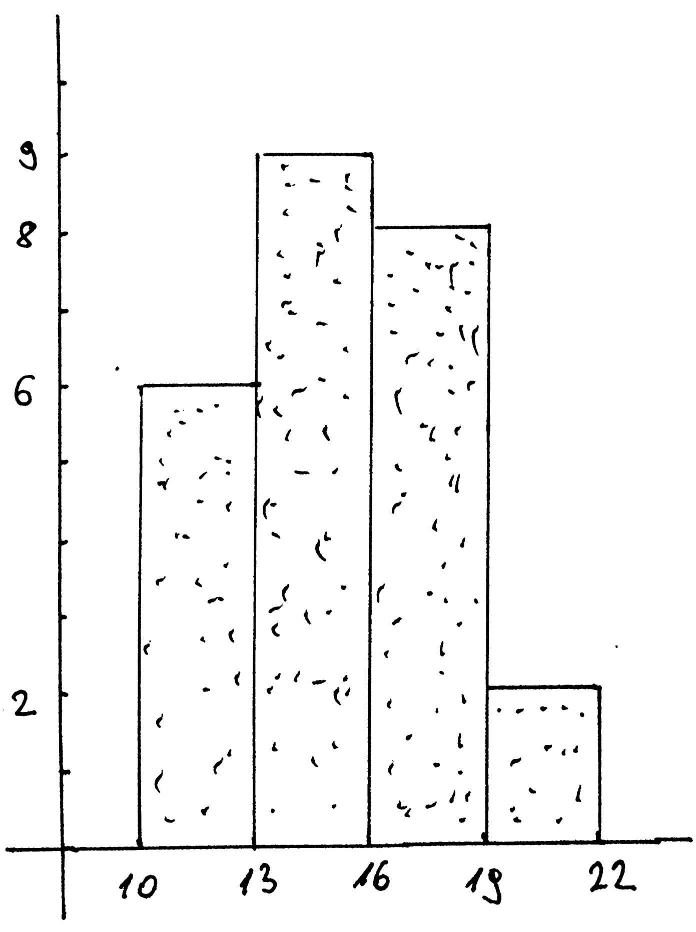
Odredimo 25ti i 75ti postotak uzorka

$0,25\cdot25 = 6,25$ nije cijeli broj ⇒ treba nam sedma najmanja vrijednost

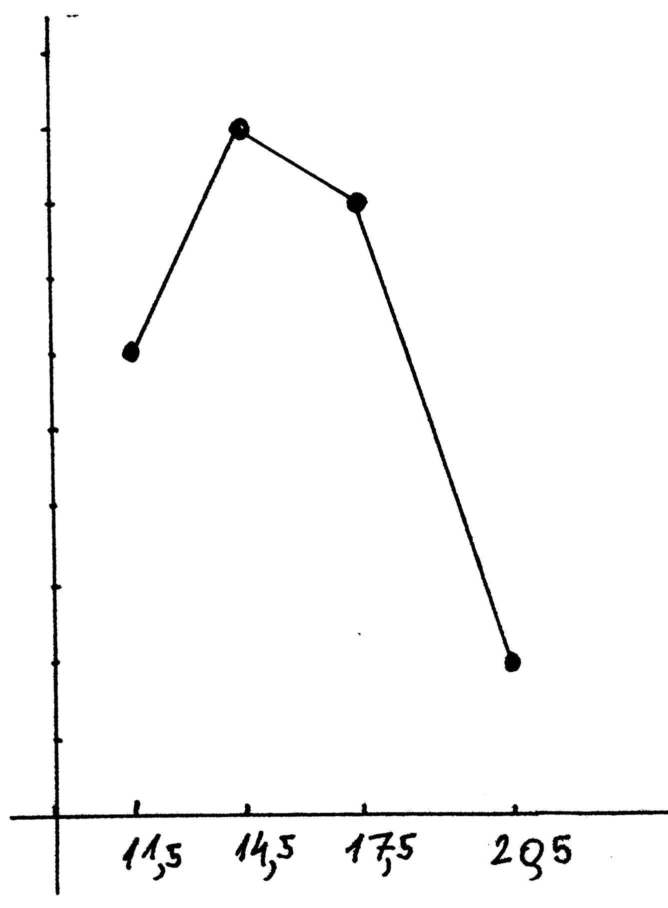
$0,75\cdot25 = 18,75$ nije cijeli broj ⇒ treba nam devetnaesta najmanja vrijednost

Sedma najmanja vrijednost je 13.
Devetnaesta najmanja vrijednost je 17.
Interkvartilni raspon je 4.
Sad želimo nacrtati histogram frekvencija sa 4 intervala.
Kako je raspon 10 i $\frac{10}{4} = 2,5$ dužina intervala mora sadržavati najmanje tri broja.

Klase intervala	Frekvencija
[10, 13)	6
[13, 16)	9
[16, 19)	8
[19, 22)	2



Histogram frekvencija



Poligon frekvencija

(b) Iz postavke zadatka nulta hipoteza je $H_0: \mu = 15$ dok je njezina alternativa $H_1: \mu \neq 15$.

Prisjetimo se

H_0	H_1	Test statistika (TS)	Test α-nivoa značajnosti
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X} - \mu_0)$	$\begin{cases} \text{odbaci } H_0, \text{ ako je } \lvert TS\rvert \geq z_{\alpha/2} \\ \text{nemoj odbaciti, u suprotnom} \end{cases}$

U našem slučaju

$n = 25$, $\sqrt{n} = 5$, $\sigma = 2$, $\overline{X} = 14{,}68$, $\mu_0 = 15$

Apsolutna vrijednost test statistike je

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\lvert\overline{X} - \mu_0\rvert = \frac{5}{2}\lvert 14{,}68 - 15\rvert = 0{,}8$$

Izračunajmo $z_{\frac{\alpha}{2}}$ ako je $\alpha = 0{,}05$.

$z_{\alpha/2} = z_{0{,}025} = ?$

$$P\{Z < z_{0{,}025}\} = 1 - P\{Z > z_{0{,}025}\} = 0{,}975 \overset{\text{iz Tabele}}{\Longrightarrow} z_{0{,}025} = 1{,}96$$

Kako je $\lvert TS\rvert < z_{\alpha/2}$ to nemamo razloga odbaciti H_0 sa datim nivoom značajnosti.

Dalje primjetimo $P\{\lvert Z\rvert \geq 0{,}8\} = 2P\{Z \geq 0{,}8\} =$

$$= 2(1 - P\{Z \leq 0{,}8\}) \overset{\text{prema tabeli}}{=\!=\!=} 2(1 - 0{,}7881) = 0{,}4238$$

Tražena p vrijednost je $p = 0{,}4238$.
Nulta hipoteza neće biti odbačena na bilo kojem nivou značajnosti manjem od $0{,}4238$. Za bilo koji nivo značajnosti veći ili jednak od $0{,}4238$ nulta hipoteza će biti odbačena.